

121 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Ι

Φροντιστηριακές Ασκήσεις #5

16-11-18

1) α) Έστω $V = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ με πράξεις $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = ((x_1^3 + x_2^3)^{1/3}, (y_1^3 + y_2^3)^{1/3})$ και $a \odot (x_1, y_1) = (ax_1, ay_1)$. Δείξτε ότι ο V με αυτές τις πράξεις δεν είναι διανυσματικός χώρος.

β) Έστω $V = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ με πράξεις $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = ((x_1^3 + x_2^3)^{1/3}, (y_1^3 + y_2^3)^{1/3})$ και $a \odot (x_1, y_1) = (a^{1/3}x_1, a^{1/3}y_1)$ $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι ο V με αυτές τις πράξεις είναι διανυσματικός χώρος.

2) Έστω $W = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R} \text{ με } 3x + 5y - 5z = 0\}$ το υποσύνολο του \mathbb{R}^3 με τις συνήθεις πράξεις. Δείξτε ότι το W είναι διανυσματικός υπόχωρος.

3) Έστω ο διανυσματικός χώρος $M(2 \times 2, \mathbb{R}) = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Να εξετάσετε αν τα ακόλουθα υποσύνολα είναι υπόχωροι.

α) Το W περιέχει όλους τους πίνακες μορφής $\begin{pmatrix} a & \beta \\ -\beta & a \end{pmatrix}$.

β) Το W' περιέχει όλους τους συμμετρικούς πίνακες.

γ) Το W'' περιέχει όλους τους αντιστρέψιμους πίνακες.

δ) Το Z περιέχει όλους τους άνω τριγωνικούς πίνακες.

4) Έστω ο διανυσματικός χώρος των πραγματικών συναρτήσεων που ορίζονται στο διάστημα $[0, 1]$. Να εξετάσετε αν τα ακόλουθα υποσύνολα είναι υπόχωροι.

α) Το W περιέχει όλες τις συναρτήσεις ώστε $f(0) = f(1)$.

β) Το W' περιέχει όλες τις συναρτήσεις ώστε $f(0) + f(1) = 1/2$.

γ) Το W'' περιέχει όλες τις συναρτήσεις ώστε $f(0) + f(1) = f(1/2)$.

5) Δείξτε ότι το διάνυσμα $(4, 3, 8)$ είναι γραμμικός συνδιασμός των στοιχείων του $A = \{(4, 1, 0), (2, 1, 2), (2, 0, -2)\}$. Είναι το A γραμμικά ανεξάρτητο;

6) Δείξτε ότι το διάνυσμα $3x^2$ είναι γραμμικός συνδιασμός των στοιχείων του $A = \{x, x^2 + 1, 2x - 3, 2x - 4\}$. Είναι το A γραμμικά ανεξάρτητο;

7) Αν το σύνολο $A = \{u, v, w\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε θα είναι και το $B = \{u, u + v, u + v + w\}$.